数学　第 1 课时 · 45 分钟

函数的单调性

图象“上升”和“下降”，用数学怎么说得精确？

今天把一句直觉，翻译成一句可以证明的话。

授课教师：＿＿＿＿＿　班级：＿＿＿＿＿＿班

2026 年 11 月

本课三个层次

知识

定义与判定

- 理解增函数、减函数的定义
- 记住定义中的“任意”二字为什么不能少
- 会求常见函数的单调区间

能力

证明五步法

- 取值 → 作差 → 变形 → 定号 → 结论
- 能独立完成一次定义证明
- 能由图象写出单调区间

素养

数形结合

- 把“看图说话”转成符号语言
- 体会“任意”带来的严谨性
- 为下一节求最值做准备

> 下课前用这三条自检：讲得清、做得对、说得明白。

“上升”到底是多上升?

给一张气温曲线图：早上 6 点到下午 2 点，曲线一路往上走。你能说“这段时间气温在升高”吗?

Q1 看图能说，但图不精确

图是连续的，眼睛看到的“上升”是估计，不是论证。

Q2 数学要管住“每一个点”

不能只验证几个时刻，必须证明区间里任取两点都成立。

Q3 “任意”两个字，是定义的分水岭

少了它，定义就退化成举例。

今天所有内容，都围绕“任意”这两个字展开。

定义：把“上升”写成不等式

增函数	**任取 x_1、$x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$** 就说 f(x) 在区间 D 上是增函数（单调递增）。
减函数	**任取 x_1、$x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$** 就说 f(x) 在区间 D 上是减函数（单调递减）。
关键	**“任意”≠“存在”，也≠“取几个试试”** 写证明时第一句必须是“任取 x_1、$x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$”。

> 定义里没有一个字是多余的：区间、任意、都有，三个条件缺一不可。

知识点　背下来，每道题都这么写

证明单调性的五步法

① 取值	**任取 x_1、$x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$** 一句话，不能省。
② 作差	**计算 $f(x_2) - f(x_1)$** 统一用“后减前”，结论方向才一致。
③ 变形	**因式分解、通分、配方、分子有理化** 目的一句话说清：变成能判断正负的形状。
④ 定号	**由 $x_1 < x_2$ 及区间条件，判断差的符号** 这一步是全场核心，写清每一步理由。
⑤ 结论	**由符号得 $f(x_2)$ 与 $f(x_1)$ 的大小关系，下结论** 结论要带区间，如“在 $[0, +\infty)$ 上单调递增”。

> 五步里最容易被跳过的是③变形，最容易出错的是④定号。

记住结论，但要知道怎么来的

常见函数单调性速查

函数	单调性	备注
$y = kx + b$	$k > 0$ 时在 R 上递增；$k < 0$ 时在 R 上递减	一次函数，看斜率符号
$y = ax^2 + bx + c$	$a > 0$ 时，对称轴左侧递减、右侧递增	对称轴 $x = -b/(2a)$，$a < 0$ 时反过来
$y = k/x$	$k > 0$ 时，$(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 上分别递减	两个区间不能合并写
$y = \sqrt{x}$	在 $[0, +\infty)$ 上递增	定义域优先，端点要写进去

例题精讲　五步法完整示范

证明：$f(x) = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增

题目

证明函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数。

1. 取值：任取 x_1、$x_2 \in [0, +\infty)$，且 $x_1 < x_2$。
2. 作差：$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2$。
3. 变形：$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$。
4. 定号：由 $x_1 < x_2$ 得 $x_2 - x_1 > 0$；由 x_1、$x_2 \in [0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$ 得 $x_2 + x_1 > 0$。
5. 结论：所以 $f(x_2) - f(x_1) > 0$，即 $f(x_2) > f(x_1)$，故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增。

结论　任取 → 作差 → 因式分解 → 定号 → 结论，五步写全才算满分。

> 注意：若区间改为 R，$x_2 + x_1$ 的符号无法确定，结论就不成立——这就是区间条件的作用。

阅卷老师最想看到的三个坑

三个高频失分点

错误写法	为什么错	正确做法
取 $x_1 = 1$、$x_2 = 2$，算出 $f(1) < f(2)$，所以递增	举例只能说明“存在”，不能说明“任意”	必须“任取”，再对差式定号
$f(x) = 1/x$ 在 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ 上递减	两个区间上各自递减，但合起来不单调	分开写：在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上分别递减
只写“在定义域上递增”	定义域可能分成几段，各段结论不同	结论必须写明具体区间，且用集合或区间表示

课堂练习　先独立做，再对答案

课堂练习：三题限时 12 分钟

1　求 $y = -2x + 3$ 的单调区间，并用定义证明。

提示：先由 $k < 0$ 判断方向，再按五步写，作差后直接提公因式。

2　判断 $f(x) = 1/x$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性，并证明。

提示：作差后通分，分母 $x_1x_2 > 0$，只需看分子。

3　已知 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增，且 $f(2a - 1) < f(a + 1)$，求 a 的取值范围。

提示：先保证 $2a - 1$ 与 $a + 1$ 都在 $[1,3]$ 内，再由单调性脱去 f。

第 3 题答案：$(2a-1) < (a+1)$ 得 $a < 2$，配合定义域 $1 \le 2a-1 \le 3$ 与 $1 \le a+1 \le 3$，得 $a \in [1, 2)$。

4 人一组，每组一张图象卡

小组任务：把图象翻译成符号

01 **第一步：写定义域**

先看图象左右到哪里，定义域错了后面全错。

02 **第二步：切分区间**

以最高点、最低点、断点为界，把图象切成几段。

03 **第三步：逐段判断**

每段任取两点比较，写出“在 _ _ 上递增/递减”。

04 **第四步：互查**

交换卡片，专门找对方有没有合并区间、有没有漏端点。

> 判断标准只有一条：你写的区间，别人照着能画出同一张图。

回头看黑板

小结：今天真正学了三件事

01 一个定义

增函数：任取 $x_1 < x_2$，都有 $f(x_1) < f(x_2)$。“任意”是灵魂。

02 一套流程

取值、作差、变形、定号、结论——顺序不能乱，一步不能省。

03 一条经验

先看图象找方向，再用定义给证据；图形给猜想，符号给结论。

> 下一节用单调性求最大（小）值，今天这套证明是唯一的工具。

作业与预习

必做	· 教材 P79 练习 1、2、3 · 用定义证明 f(x) = √x 在 [0, +∞) 上单调递增（提示：分子有理化）
选做	· 判断 f(x) = x + 1/x 在 (0, 1) 与 (1, +∞) 上的单调性，并说明理由
预习	· 1.3.2 函数的最大（小）值：想一想，单调性与最值之间是什么关系

> 作业下次课前收，预习内容下节课随机提问，做好准备。

下一讲

下一节：有了单调性，就能找最值

- 1.3.2 函数的最大（小）值：先看图象的最高点、最低点在哪里。
- 带问题来：单调区间和最大（小）值之间，是什么关系？
- 作业里那道 √x 的证明，下节课我请一位同学上黑板写。